情報処理学会論文誌 Vol.0 No.0 1–14 (??? 1959)

様々な組合せ子の非ω-強頭部正規化可能性・非基礎ループ性・非循環性

岩見 宗弘[1,a)]

受付日 xxxx年0月xx日, 採録日 xxxx年0月xx日

概要：Smullyan(1985) は，多くの組合せ子を紹介している．これらの組合せ子に関してラムダ計算，組合せ子論理，項書き換えシステムの分野において多くの研究が行われてきた．岩見 (2009) は，組合せ子の非循環性に対する十分条件を与え，その十分条件を用いて，組合せ子 L と O の非循環性を示した．また，組合せ子 O が停止性をもたないことを示した．さらに，組合せ子 O は非基礎ループ性をもつことを示した．岩見と青戸 (2012) は，無限項上の項書き換えシステムに対する ω-強頭部正規化可能性の反証手続きを提案し，多くの組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性の自動反証実験を行った．Smullyan(1994) は，Smullyan(1985) で紹介した組合せ子以外にも多くの組合せ子を紹介している．これらの新しく紹介された組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性は研究されていない．また，これらの組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性も研究されていない．本稿では，先行研究で提案した反証手続きを用いて，これらの組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性を反証する．さらに，これらの組合せ子が停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもつかどうかを明らかにする．

キーワード：組合せ子，非 ω-強頭部正規化可能性，非基礎ループ性，非循環性，項書き換えシステム，ラムダ計算，組合せ子論理

Non-ω-Strong Head Normalization, Non-Ground Loop and Acyclic of Several Combinators

Munehiro Iwami[1,a)]

Received: xx xx, xxxx, Accepted: xx xx, xxxx

Abstract: Smullyan(1985) introduced many combinators. Many works were done with respect to these combinators in the field of lambda-calculus, combinatory logic and term rewriting systems. Iwami(2009) gave a sufficient condition for acyclic of combinators. We showed that acyclic of combinators L and O using this condition. Also, we showed that combinator O is not terminating. Furthermore, we showed that combinator O admits no ground loops. Iwami and Aoto(2012) proposed disproving procedure of ω-strong head normalization for infinitary term rewriting systems. We conducted experiments to disprove ω-strong head normalization of many combinators automatically. Smullyan(1994) introduced many combinators other than those introduced in Smullyan(1985). ω-Strong head normalization for these newly introduced combinators has not been studied. Also, termination, acyclicity, non-ground loop and non-loop of these combinators have not been studied. In this paper, we disprove ω-strong head normalization of these combinators using the disproving procedure proposed in the previous work. In addition, we study termination, acyclicity, non-ground loop, and non-loop of these combinators.

Keywords: Comibators, Non-ω-Strong Head Normalization, Non-Ground Loop, Acyclic, Term Rewriting Systems, Lambda-Calculus, Combinatory Logic

1. はじめに

Smullyan の文献 [26] は組合せ子に基づいた論理パズルの本であり，多くの組合せ子が紹介されている．これらの組合せ子に関してラムダ計算，組合せ子論理，項書き換えシステムの分野において多くの研究が行われてきた [3], [13], [14], [15], [17], [25], [28], [29], [32].

様々な書き換えシステムにおいて，停止性はすべての書き換えの結果が必ず得られることを保証する重要な性質である．Klop はラムダ計算と組合せ子論理の違いの 1 つが循環書き換え，すなわち，項 t から同じ項 t へ到達するような書き換え $t \to t_1 \to \cdots \to t$ にあることを示した [19]. 書き換え $\to$ により項 t から得られる項全体の集合を書き換え関係 $\to$ に基づく t の書き換えグラフとよび，$\mathcal{G}(t)$ と表す．このとき，ラムダ計算において，$\mathcal{G}(t)$ が有限でありかつ循環書き換えを含むような項 t は存在する．一方，組合せ子論理において，$\mathcal{G}(t)$ が有限でありかつ循環書き換えを含むような項 t は存在しない [19].

停止性をもつ書き換えシステムは，明らかに循環書き換えをもたない．一方，Barendgregt [2] が組合せ子 S は停止性をもたないことを示しているため，循環書き換えをもつかどうかは自明ではない．そこで Bergstra ら [4] は組合せ子 S が非循環性をもつことを示している．また，Waldmann [32] は非循環性よりも一般的な性質である非基礎ループ性を提案し，組合せ子 S が非基礎ループ性をもつことを示している．非ループ性は非基礎ループ性を一般化した性質である．Sprenger ら等は組合せ子 L が停止性をもたないことを示している [28], [29]．さらに，Klop [17] は，組合せ子 O が停止性をもたないことを示している．岩見 [14] は，組合せ子の非循環性に対する十分条件を与え，その十分条件を用いて，組合せ子 L と O の非循環性を示した．また，組合せ子 O が停止性をもたないことを文献 [17] とは独立して示した．さらに，組合せ子 O は非基礎ループ性をもつことを示した．また，組合せ子は関数型プログラミング言語の効率的な実装に応用されている [23], [31].

一般の項を扱う計算モデルとして，項書き換えシステム (TRS) がよく知られている．組合せ子がもつ書き換え規則は TRS としてみなすことができる．有限項上の TRS に基づく様々な検証法において停止性は非常に有用な性質として知られており，様々な停止性の証明法や反証法が提案されている [1], [10], [22], [30]．一方，無限項上の TRS では停止性を考える意味があまりない．無限項を対象とする TRS は停止性をもたないことが普通である．このため，停止性に代わる無限項上の TRS における基本的な性質として，ω-強頭部正規化可能性が考えられている [9], [18], [33]. ω-強頭部正規化可能性は，項のどの位置も有限回しか書き換えができないという性質である．岩見と青戸 [15] は，無限項上の TRS に対する ω-強頭部正規化可能性の反証手続きを提案し，多くの組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性の自動反証実験を行った．

Smullyan の文献 [27] は対角化と自己参照に関する専門書であり，後半で組合せ子の間の関係に関する多くの問題により組合せ子論理を紹介して，組合せ子論理に関する不動点定理を議論している．文献 [27] では，文献 [26] で紹介した組合せ子以外にも多くの組合せ子を紹介している．これらの新しく紹介された組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性は明らかにされていない．また，これらの組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性も明らかにされていない．

本論文では，先行研究で提案した反証手続きを用いて，これらの組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性を反証する．さらに，これらの組合せ子が停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもつかどうかを明らかにする．組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証結果は表 1 にまとめる．組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性については表 2 にまとめる．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，組合せ子論理と項書き換えシステムに関する定義や記法を与え，第 3 節では正則項と再帰式表現の定義を述べる．第 4 節では，ω-強頭部正規化可能性の反証手続きを説明する．第 5 節では，組合せ子の書き換え規則からなる TRS の ω-強頭部正規化可能性を反証し，停止性と非基礎ループ性を示す．第 6 節では，組合せ子 $\mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3, \Phi, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \Phi_2, \mathsf{S}_4$ の非基礎ループ性を 2 つのラベル付け手法を用いて示す．第 7 節では，組合せ子の非循環性を示す．第 8 節では，結論を述べる．

2. 準備

本論文の定義は [4], [14], [15], [30], [32] に基づく．本節では，組合せ子論理と項書き換えシステムの定義について述べる．

2.1 組合せ子論理

組合せ子論理については文献 [2] の第 7 章，文献 [6], [12] および文献 [27] の第 18 章を参照していただきたい．組合せ子論理は，第 7 節で使用する．

以下では，記号 Z をある組合せ子とする．**変数**の加算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\{Z\} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．組合せ子 Z 上の項の集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する：(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(Z, \mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(Z, \mathcal{V})$，(3) $s, t \in CL(Z, \mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(Z, \mathcal{V})$．集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ の項を **Z-項**という．また，変数を含まない Z-項を**基底 Z-項**とよび，基底 Z-項全体の集合を $CL(Z)$ で表す．**Z-文脈**，すなわち，0 個以上の

[1] 島根大学総合理工学部知能情報デザイン学科
Shimane University, Matsue, Shimane, 690-8504, Japan
[a] munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

ホール□を含む Z-項の集合 $CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$ を次のように定義する：(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$，(3) $\square \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$，(4) $s,t \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(\{Z,\square\},\mathcal{V})$．1 つのホール□を含む Z-文脈を $C[]$ で表す．$C[t]$ は Z-文脈 $C[]$ のホール□を Z-項 t で置き換えた結果である．(st) は括弧を省略して，st と書く．括弧は左結合である，すなわち，$s_1s_2\ldots s_n$ は $(\ldots(s_1s_2)\ldots s_n)$ を意味する．Z-項 t に含まれている変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す．関数 $\sigma : \mathcal{V} \to CL(Z,\mathcal{V})$ の定義域 $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを**代入**という．代入 σ を $\{x := \sigma(x) \mid x \in dom(\sigma)\}$ と表す．すべての代入 σ はある組合せ子 Z と Z-項 $t_1,\ldots,t_n$ に対して，$\sigma(Zt_1\ldots t_n) = Z\sigma(t_1)\ldots\sigma(t_n)$ を満たす写像 $\sigma : CL(Z,\mathcal{V}) \to CL(Z,\mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する．書き換え規則 $Zx_1\ldots x_n \to t$ は組合せ子 Z がもつ方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：(1) 変数 $x_1,\ldots,x_n$ は互いに相異なる，(2) $\mathcal{V}(t) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$．書き換え規則 $Zx_1\ldots x_n \to t$ による $CL(Z,\mathcal{V})$ 上の書き換え $\to$ を次のように定義する：$s \to t$ であるとき，かつそのときに限り，ある Z-文脈 $C[]$，$u_1,\ldots,u_n \in CL(Z,\mathcal{V})$ に対して，$s = C[Zu_1\ldots u_n]$ かつ $t = C[t\{x_1 := u_1,\ldots,x_n := u_n\}]$．このとき，$Zu_1\ldots u_n$ を **Z-リデックス**という．書き換え $\to$ が無限書き換え列 $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$ をもたないとき，**停止性をもつ**という．書き換え $\to$ の推移的閉包を $\to^+$ で表す．書き換え $t \to^+ t$ を**循環**であるという．書き換え $\to$ が循環書き換えをもたないとき，組合せ子 Z は**非循環性をもつ**という．Z-文脈 $C[]$，代入 σ に対して，書き換え $t \to^+ C[t\sigma]$ を**ループ**という．書き換え $\to$ がループをもたないとき，組合せ子 Z は**非ループ性をもつ**という．書き換え $t \to^+ C[t]$ を**基礎ループ**という．書き換え $\to$ が基礎ループをもたないとき，組合せ子 Z は**非基礎ループ性をもつ**という．組合せ子 Z が停止性をもつならば非ループ性をもつ．逆に，組合せ子 Z が非ループ性をもつとき停止性をもつとは限らない．また，組合せ子 Z が非ループ性をもつならば非基礎ループ性をもつ．逆に，組合せ子 Z が非基礎ループ性をもつとき非ループ性をもつとは限らない．さらに，組合せ子 Z が非基礎ループ性をもつならば非循環性をもつ．逆に，組合せ子 Z が非循環性をもつとき非基礎ループ性をもつとは限らない．本論文では文献 [27] に掲載されており，文献 [15] では扱われていない組合せ子を取り扱う．

2.2　項書き換えシステム

項書き換えシステムの詳細については文献 [9], [15], [18], [30] を参照していただきたい．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，**変数**の加算無限集合を $\mathcal{V}$ と表す ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．0 引数の関数記号を**定数**とよび，$n$ 引数の関数記号を $\mathcal{F}_n$ と表す．$\mathbb{N}_+$ を正整数集合とし，正整数の有限列の集合を $\mathbb{N}_+^*$ と記す．有限列 $p,q \in \mathbb{N}_+^*$ の連結を $p.q$ と記す．部分関数 $t : \mathbb{N}_+^* \to \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ のうち，以下の条件を満たすものを $\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上の**項**とよぶ：(1) $t(\epsilon) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$，(2) 任意の $p \in \mathbb{N}_+^*$ に対して，$t(p.i) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ であるとき，かつそのときに限り，$t(p) \in \mathcal{F}_n$ かつ $1 \leq i \leq n$．ここで，ϵ は空列を表す．$\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上の項の集合を $T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ と表す．

項 $t \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ の定義域 $Pos(t) = \{p \in \mathbb{N}_+^* \mid t(p) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}\}$ の要素を t における**位置**とよぶ．特に，位置 ϵ を根位置とよぶ．$t(p)$ を項 t の位置 p に出現する記号とよび，特に $t(\epsilon)$ を**根記号**とよぶ．$p \notin Pos(s)$ なる $p \in \mathbb{N}_+^*$ に対して，$\perp$ は $\perp \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数とする．このとき，$s = t \Leftrightarrow \forall p \in Pos(s).\ s(p) = t(p)$ が成立する．項 t に出現する変数集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す．$\mathcal{V}(t) = \emptyset$ なる項を**基底項**という．位置集合 $Pos(t)$ が有限集合であるとき，項 t を**有限**であるという．有限項の集合を $T_{fin}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ と記す．特に，有限項と区別するときには，項を**無限項**とよぶこともある．位置 $p \in Pos(t)$ における項 t の**部分項** $t|_p$ を $t|_p(q) = t(p.q)$ により定義する．特に，$p \neq \epsilon$ のとき，$t|_p$ を t の**真部分項**とよび，$t(p) \notin \mathcal{V}$ のとき，$t|_p$ を t の**非変数部分項**とよぶ．関数記号 $f \in \mathcal{F}_n$ および項 $t_1,\ldots,t_n \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，(1) $t(\epsilon) = f$，(2) $t(i.p) = t_i(p)$ $(1 \leq i \leq n, p \in \mathbb{N}_+^*)$ により定義される項 t を $f(t_1,\ldots,t_n)$ と表す．位置集合上の接頭辞順序を $p \leq q \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}_+^*.\ q = p.r$ により定義する．ある位置 q および正整数 $i < j$ が存在して，$q.i \leq p_1$ かつ $q.j \leq p_2$ となるとき，p_1 は p_2 の**左に**位置するという．

関数 $\sigma : \mathcal{V} \to T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を**代入**とよぶ．代入 σ を項 $t \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に適用した結果 $\sigma(t)$ を，以下のように定義する：$\sigma(t)(p) = \sigma(t(p_0))(p_1)$ ($p = p_0.p_1$ かつ $t(p_0) \in \mathcal{V}$ を満たす $p_0,p_1 \in \mathbb{N}_+^*$ が存在する場合)，$\sigma(t)(p) = t(p)$ (それ以外の場合)．直感的には，$\sigma(t)$ は t に出現する変数 $x \in \mathcal{V}$ を $\sigma(x)$ により置き換えて得られる項を表す．代入 σ の定義域を $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ とする．$dom(\sigma) = \{x_1,\ldots,x_n\},\sigma(x_i) = t_i$ なる代入を $\{x_1 := t_1,\ldots,x_n := t_n\}$ と表す．$dom(\sigma)$ が有限かつ任意の $x \in dom(\sigma)$ に対して $\sigma(x) \in T_{fin}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ であるとき，σ を**有限代入**とよぶ．$\sigma(t)$ を $t\sigma$ とも記す．項 s,t に対して，$s\sigma = t$ となる代入 σ が存在するとき，項 s は t と**照合可能**であるという．このような代入 σ のうち，$dom(\sigma) = \mathcal{V}(s)$ なる σ を $\mathrm{match}_{inf}(s,t)$ と記す．また，そのような代入 σ を使わないときは，$\mathrm{match}_{inf}(s,t)$ と書いて項 s が t と照合可能であることを表す．代入の**合成**を $\circ$ により表す．すなわち，任意の変数 $x \in \mathcal{V}$ に対して $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$．

$\square \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数□を**ホール**とよぶ．$T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$ の要素 C のうち，$\{p \in \mathbb{N}_+^* \mid C(p) = \square\}$ が有限集合となるものを**文脈**とよぶ．$C \in T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$ が $\{p_1,\ldots,p_n\} = \{p \in \mathbb{N}_+^* \mid C(p) = \square\}$ かつ任意の $i < j$ について p_i が p_j より左に位置するとき，C を $C[,\ldots,]_{p_1,\ldots,p_n}$

と表す．文脈 $C[,\ldots,]_{p_1,\ldots,p_n}$ と項 $t_1,\ldots,t_n \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，項 $t = C[t_1,\ldots,t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ を以下のように定義する：$t(p) = t_i(q)$ ($p = p_i.q$ なる i, q が存在する場合)，$t(p) = C(p)$ (それ以外の場合)．直感的には，$C[t_1,\ldots,t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ は文脈 C に出現するホールを左から順に $t_1,\ldots,t_n$ に置き換えて得られる項を表す．また，ホールの出現をちょうど 1 つもつ文脈を $C[\,]_p$ と記す．さらに，項 s の位置 p の部分項 $s|_p$ をホールに置き換えて得られる文脈を $s[\,]_p$ と表す．

等式を $s \approx t$ と表す．ただし，ここで $s,t \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．等式 $s \approx t$ の左辺は s，右辺は t をさし，等式の左辺と右辺を区別する．等式 $l \approx r$ が以下の条件を満たすとき，これを**書き換え規則**とよび，$l \to r$ と記す：(1) l, r は有限項，(2) $l \notin \mathcal{V}$，(3) $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$．書き換え規則の集合 $\mathcal{R}$ を**項書き換えシステム** (TRS) とよぶ．

項 $s,t \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\,]_p$ が存在して，$s = C[l\sigma]_p$ かつ $t = C[r\sigma]_p$ のとき，$s \to_{p,\mathcal{R}} t$ と表す．これを位置 p における項 s から項 t への**簡約**または**書き換えステップ**とよぶ．根位置 ϵ における簡約を**根書き換え**とよぶ．部分項 $s|_p$ を**リデックス**とよぶ．文脈から明らかな場合または必要がない場合は $p, \mathcal{R}$ を省略する．$\to_{\mathcal{R}}$ の反射推移的閉包を $\to^*_{\mathcal{R}}$ と記し，$\to_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\to^+_{\mathcal{R}}$ と記す．

等式集合 E の**単一化子**とは，任意の $s \approx t \in E$ に対して $s\sigma = t\sigma$ となる代入 σ をいう．等式集合 E の単一化子の集合を $\mathrm{Unif}_{inf}(E)$ と表す．$\mathrm{Unif}_{inf}(E) \neq \emptyset$ のとき，等式集合 E は**単一化可能**であるという．等式集合 $\{s \approx t\}$ が単一化可能であるとき，s と t が単一化可能であるという．単一化可能性を判定する問題を，**単一化問題**という．代入上の擬順序 $\precsim$ を $\theta \precsim \eta \iff$ ある代入 ρ が存在して $\eta = \rho \circ \theta$ により定めるとき，単一化子のうち擬順序 $\precsim$ に関して極小となる単一化子を**最汎単一化子**とよぶ．等式集合 E が単一化可能であるときには，最汎単一化子が存在し，同値関係 $\succsim \cap \precsim$ に関して一意に定まる [5]．等式集合 E の最汎単一化子の 1 つを $\mathrm{mgu}_{inf}(E)$ と記す．特に，$E = \{s \approx t\}$ のとき，$\mathrm{mgu}_{inf}(E)$ を $\mathrm{mgu}_{inf}(s,t)$ と記す．しばしば，代入を限定して考えることがある．特に，等式集合 E が**有限項上で単一化可能である**とは，有限代入である $\mathrm{Unif}_{inf}(E)$ の要素が存在することをいう．特に区別する場合には，単一化可能であることを**無限項上で単一化可能である**ともいう．

項 $s \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在し，$\mathcal{V}(l) \cap \mathcal{V}(s) = \emptyset$ となるように $l \to r$ から変数の名前換えを行って得られる書き換え規則を $l' \to r'$ とおくとき，s の非変数部分項 $s|_p$ と l' が単一化可能であるとする．$\theta = \mathrm{mgu}_{inf}(s|_p, l')$，$t = s[r']_p\theta$ とおくとき，$s \rightsquigarrow_{p,\theta,\mathcal{R}} t$ と記す．これを位置 p における項 s から項 t への**ナローイングステップ**とよぶ．$p = \epsilon$ の場合を**根ナローイング**とよぶ．文脈から明らかな場合または必要がない場合は $p, \mathcal{R}$ は省略する．$s_1 \rightsquigarrow_{\theta_1} s_2 \rightsquigarrow_{\theta_2} \cdots \rightsquigarrow_{\theta_{n-1}} s_n$ となるとき，$\sigma = \theta_{n-1} \circ \cdots \circ \theta_1$ に対して $s_1 \rightsquigarrow^*_{\sigma} s_n$ と記す．$s \rightsquigarrow^*_{\sigma} t$ ならば，$s\sigma \to^*_{\mathcal{R}} t$ となる．また，s, t, θ が有限であるとき，$s \rightsquigarrow_{p,\theta,\mathcal{R}} t$ を**有限ナローイングステップ**とよぶ．

最小の無限順序数を ω で表す．α を $\alpha > 0$ なる順序数とする．関数 $A : \alpha \to T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ が任意の β $(0 \leq \beta + 1 < \alpha)$ について $A(\beta) \to_{\mathcal{R}} A(\beta+1)$ を満たすとき，A を**超限書き換え列**という．ここで，$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ であることに注意する [8]．特に，$\alpha < \omega$ であるとき A を**有限書き換え列**，$\alpha = \omega$ であるとき A を**無限書き換え列**とよぶ．ただし，本論文で扱うのは有限または無限の書き換え列のみである．文脈から明らかな場合，$A(i) = t_i$ $(0 \leq i \leq n)$ なる有限書き換え列 $A : n+1 \to T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots \to_{\mathcal{R}} t_n$ と書き，$A(i) = t_i$ $(0 \leq i < \omega)$ なる無限書き換え列 $A : \omega \to T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ と書く．

TRS $\mathcal{R}$ が有限項 t_0 に対して，無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ をもたないとき，**停止性をもつ**という．TRS $\mathcal{R}$ において，有限項 t に対する書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} t$ を**循環**であるという．TRS $\mathcal{R}$ が循環書き換えをもたないとき，**非循環性をもつ**という．t を有限項，$C[\,]$ を文脈，σ を代入とする．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} C[t\sigma]$ を**ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ がループをもたないとき，**非ループ性をもつ**という．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} C[t]$ を**基礎ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループをもたないとき，**非基礎ループ性をもつ**という．

3. 正則項と再帰式表現

本節では，正則項と再帰式表現の定義を述べる．

定義 1 (正則項 [5]) 項 t が**正則**であるとは t の部分項集合が有限であるときをいう．

例 2 (正則項) 項 $t = ((((\mathsf{B}_2 \cdot t) \cdot y) \cdot z) \cdot w)$ とする．t の部分項集合は $\{t, (((\mathsf{B}_2 \cdot t) \cdot y) \cdot z), ((\mathsf{B}_2 \cdot t) \cdot y), (\mathsf{B}_2 \cdot t), \mathsf{B}_2, y, z, w\}$ より有限である．よって，t は正則項である．

明らかに有限項は正則である．代入 θ に対して，$dom(\theta)$ が有限であり，かつ，任意の $x \in dom(\theta)$ について $\theta(x)$ が正則となるとき**正則代入**とよぶ．

命題 3 (正則項の単一化 [5]) 正則項の無限項上での単一化は決定可能であり，単一化可能であるときに最汎単一化子を求めるアルゴリズムが存在する．また，最汎単一化子は正則代入になる．

定義 4 (再帰式表現 [15]) 有限代入 $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ が以下の条件を満たすとき，これを**再帰式表現**とよび，$[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ と表す：$\neg\exists i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}.\ (\forall 1 \leq j < k.\ t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \land t_{i_k} = x_{i_1}$．

定義 5 (再帰式表現の解 [15]) $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とし，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，

$C_i[x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_i}}]_{p_{i_1},\ldots,p_{i_{k_i}}} = t_i$ とする．ただし，文脈 C_i には変数 $x_1,\ldots,x_n$ が出現しないとする．このとき，項 $\theta^\star(x_1),\ldots,\theta^\star(x_n)$ を以下のように相互再帰的に定義する．$\theta^\star(x_i)(p) =$

$$\begin{cases} C_i(p) & (p \in Pos(C_i) \wedge C_i|_p \neq \Box \text{ の場合}) \\ \theta^\star(x_{i_j})(q) & (\exists j, q.\ p = p_{i_j}.q \text{ の場合}) \end{cases}$$

項 $\theta^\star(x_1),\ldots,\theta^\star(x_n)$ を再帰式表現の**解**とよぶ．

命題 6　(正則項と再帰式表現 [5]) 再帰式表現の解は正則項である．また，任意の正則項はある再帰式表現の解となる．

任意の正則項は，再帰式表現 θ を用いて，$\theta^\star$ の形で表すことができる．これを**正則項の再帰式表現**とよぶ．$\mu x.t$ (ただし，$x \neq t$ とする) は $[x := t]^\star(x)$ を意味する．$\mu x.$ は関数適用より結合力が弱いものとして括弧を省略する．例えば，$\mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z'$ は $[x := \mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z']^\star(x)$ を意味する．

4. ω-強頭部正規化可能性の反証手続き

本節では，ω-強頭部正規化可能性の反証手続きを与える．詳細は文献 [15] を参照していただきたい．

定義 7　(ω-強頭部正規化可能性 [33]) $\mathcal{R}$ を TRS とする．任意の無限書き換え列 $t_0 \to_{p_0,\mathcal{R}} t_1 \to_{p_1,\mathcal{R}} t_2 \to_{p_2,\mathcal{R}} \cdots$ に対して，ある n_0 が存在して任意の n $(n_0 \leq n < \omega)$ について $p_n \neq \epsilon$ となるとき，$\mathcal{R}$ は**ω-強頭部正規化可能性**をもつという．TRS $\mathcal{R}$ が ω-強頭部正規化可能性をもつことを $SHN^\omega(\mathcal{R})$ と表す．

例えば，$\mathcal{R} = \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))\}$ とするとき，$\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもつ．$\mathcal{R} = \{\mathsf{h}(x) \to \mathsf{h}(x)\}$ とするとき，$\mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\ldots))) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\ldots))) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \cdots$ より，$\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

また，有限項上の TRS の ω-強頭部正規化可能性は，先頭停止性 (top-terminating) の概念と一致する．TRS $\mathcal{R}$ が**先頭停止性**をもつとは，有限項から始まり根位置を無限回書き換える無限書き換え列が存在しないときをいう [32]．例えば，組合せ子 S は先頭停止性をもつことが示されている [32]．一方，組合せ子 S は ω-強頭部正規化可能性をもたないことが示されている [33]．

定義 8　(有限代入上の関係 $\blacktriangleright$ [15]) 有限代入 $\theta = \{x_1 := u_1,\ldots,x_n := u_n\}$，$X = \bigcup_{1\leq i\leq n}\mathcal{V}(u_i)$，$Y = X \cup \{x_1,\ldots,x_n\}$ とする．ある代入 $\xi : X \to Y$ に対して，$\delta = \xi \circ \theta$ となり，δ が再帰式表現であるとき，$\delta \blacktriangleright \theta$ と記す．

例 9　(関係 $\blacktriangleright$) $\delta = [x := \mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z', w' := y \cdot z \cdot w, x' := x] \blacktriangleright \{x := \mathsf{B}_2 \cdot x' \cdot y' \cdot z', w' := y \cdot z \cdot w\} = \theta$ が成り立つ．$X = \{x', y', z', y, z, w\}, Y = \{x', y', z', w', x, y, z, w\}$ より $\xi = \{x' := x\}$ をとればよい．

手続き 10　(ω-強頭部正規化可能性の反証手続き [15]) 図 1 のプログラム 1 に SML プログラミング言語風の構文をもつ関数型プログラムとして ω-強頭部正規化可能性の反証手続き `disprove-omega-shn` を与える．手続きへの入力は TRS $\mathcal{R}$ である．手続きが成功した場合にはある正則項 t について `SUCCESS` t を，失敗した場合は `FAIL` を返す．また，手続きが停止しない（発散する）場合もある．手続き中の $\mathrm{REN}(t)$ は，項 t に出現する変数を新しい変数に名前換えした項を表す．また，$[x \mid P(x)]$ はリスト内包表記，すなわち $P(x)$ を満たす要素 x のリストを表す．

手続きにおける反証条件の判定は手続き 2 行目の `check` 関数で行っている．手続き 3 行目の $\theta = \mathrm{mgu}_{inf}(\mathrm{REN}(l\sigma), t)$ は，ナローイングにより得られる代入を求めている．ここではナローイングを用いるため，変数の名前換えを行っている．次に，変数の名前を同一視した $\delta \blacktriangleright \theta$ なる代入 δ を求め，根位置における無限書き換え列の存在を保証するために照合 $\mathrm{match}_{inf}(l\sigma\delta^\star, t\delta^\star)$ を行う．ここで，無限書き換え列の存在を保証するための照合は，ナローイングの場合と違い，変数の名前換えを行わない．6 行目の `step` 関数は幅優先探索で `check` 関数による判定を試みる候補を構成し，`check` 関数を候補に適用する．判定候補である 3 つ組 (l, t, σ) は，$l \to r \in \mathcal{R}$ かつ $r \rightsquigarrow^*_\sigma t$ を満たす．`check` 関数において反証条件を調べ，判定に失敗した場合にはナローイング列 $r \rightsquigarrow^*_\sigma t$ を延長し，候補リストに追加する．

次の命題は，プログラム 1 の反証手続きの正しさ（健全性），すなわち，手続きに成功する場合には必ず ω-強頭部正規化可能性が成立しないことを示す．

命題 11　(ω-強頭部正規化可能性の反証法の健全性 [15]) TRS $\mathcal{R}$ に対して，図 1 のプログラム 1 の ω-強頭部正規化可能性の反証手続きが成功するとき，$\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

例 12　(SHN^ω の反証例) TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w \to x \cdot (y \cdot z \cdot w)\}$ を考える．このとき，TRS $\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたないことを示す．反証手続きの 9 行目で $\mathtt{step}[(\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w, x \cdot (y \cdot z \cdot w), \emptyset)]$ がよびだされ，2 行目の $\mathtt{check}(\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w, x \cdot (y \cdot z \cdot w), \emptyset)$ の評価に入る．このとき，$\theta = \mathrm{mgu}_{inf}(\mathsf{B}_2 \cdot x' \cdot y' \cdot z' \cdot w', x \cdot (y \cdot z \cdot w)) = \{x := \mathsf{B}_2 \cdot x' \cdot y' \cdot z', w' := y \cdot z \cdot w\}$ が得られる．次に，$\delta = [x := \mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z', w' := y \cdot z \cdot w, x' := x] \blacktriangleright \theta$ をとると，$\delta^\star = \{x := \mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z', w' := y \cdot z \cdot w, x' := \mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z'\}$ が求まる．いま，正則項 $u = \mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z'$ とおいて，$u = \mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y' \cdot z'$ に注意する．このとき，

$$\begin{aligned} & \mathrm{match}_{inf}((\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w)\emptyset\delta^\star, (x \cdot (y \cdot z \cdot w))\delta^\star) \\ = \; & \mathrm{match}_{inf}(\mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y \cdot z \cdot w, u \cdot (y \cdot z \cdot w)) \\ = \; & \mathrm{match}_{inf}(\mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y \cdot z \cdot w, \mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y' \cdot z' \cdot (y \cdot z \cdot w)) \\ = \; & \{y := y', z := z', w := y \cdot z \cdot w\}. \end{aligned}$$

よって，$\mathtt{check}(\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w, x \cdot (y \cdot z \cdot w), \emptyset)$ は `SOME` $\mathsf{B}_2 \cdot (\mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z') \cdot y \cdot z \cdot w$ と評価され，`SUCCESS`


```
fun disprove-omega-shn (R) =
let fun ckeck (l,t,σ) =
        if ∃θ. θ = mgu_inf(REN(lσ),t), ∃δ ▶ θ. match_inf(lσδ*, tδ*)
        then SOME lσδ* else NONE
    fun narrow (l,t,σ) = [(l,t′,ρ∘σ) | t ⇝_ρ t′]
    fun step [] = FAIL
      | step ((l,t,σ)::xs) = case check (l,t,σ) of
              SOME t ⇒ SUCCESS t | NONE ⇒ step (xs @ narrow (l,t,σ))
in step [(l,r,∅) | l → r ∈ R] end
```

図 1　プログラム 1：ω-強頭部正規化可能性の反証手続き ([15])

Fig. 1　Program 1: Disproving procedure of ω-strong head normalization([15]).

$\mathsf{B}_2 \cdot (\mu x.\mathsf{B}_2 \cdot x \cdot y' \cdot z') \cdot y \cdot z \cdot w$ が返され，手続きが成功する．以下の無限書き換え列より，与えられた項は $\mathcal{R}$ の ω-強頭部正規化可能性の反例になっている．$\mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y \cdot z \cdot w \to_{\epsilon,\mathcal{R}} u \cdot (y \cdot z \cdot w) = \mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y' \cdot z' \cdot (y \cdot z \cdot w) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} u \cdot (y' \cdot z' \cdot (y \cdot z \cdot w)) = \mathsf{B}_2 \cdot u \cdot y' \cdot z' \cdot (y' \cdot z' \cdot (y \cdot z \cdot w)) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \cdots$.

5. 組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証と停止性・非基礎ループ性

本節で扱う組合せ子は文献 [27] で紹介されているものである．本節では組合せ子の ω-強頭部正規化可能性を反証する．また，停止性と非基礎ループ性をもつかどうかを明らかにする．本節において，組合せ子の書き換え規則からなる TRS の例では中置記法の適用演算子 $\cdot$ を用いる．また，$\cdot$ は左結合であるとして，不要な括弧は省略する．

文献 [15] では図 1 のプログラム 1 を SML/NJ を用いて実装していたが，実装したプログラムは最新の処理系だけではなく，当時のバージョンの処理系でも動作しない．また，本稿の例についてはプログラムを改修するよりも手作業で確認する方が早いため，反証はプログラム 1 に基づき，すべて手作業で行う．step 関数の適用を 1 ステップと数える．文献 [15] における表 2 の組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証実験では 30 例中 26 例 (うち 4 例は ω-強頭部正規化可能性をもつ) の反証に成功しており，そのうち 16 例が 1 ステップで，9 例が 2 ステップで反証に成功している．このため，本研究では反証を 2 ステップまで行い，2 ステップ以内で反証手続きが終了したものを成功とし，そうでないものを発散とする．組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証は，例 12 と同様に行うことができる．組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証結果は表 1 にまとめる．なお，表中では組合せ子の適用演算子 $\cdot$ は省略している．また，組合せ子の書き換え規則からなる TRS の停止性は，まず辞書式経路順序 $>_{lpo}$([1], [22]) を用いて手作業で示し，次に AProVE [11] を用いてすべての結果を確認する．

5.1　組合せ子 B から得られる組合せ子

組合せ子 B は書き換え規則 $\mathsf{B}xyz \to x(yz)$ をもつ．次の組合せ子は B だけを組み合わせて定義できる [27].

$$\mathsf{B}_2 xyzw \to x(yzw) \qquad \mathsf{B}_3 xyzwv \to x(yzwv)$$
$$\mathsf{D}_1 xyzwv \to xyz(wv) \qquad \mathsf{D}_2 xyzw \to x(y(zw))$$
$$\mathsf{D}_3 xyzwv \to x(yz)(wv) \qquad \hat{\mathsf{E}} xy_1y_2y_3z_1z_2z_3 \to x(y_1y_2y_3)(z_1z_2z_3)$$

辞書式経路順序 $>_{lpo}$ を用いると，組合せ子 $\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \mathsf{D}_3, \hat{\mathsf{E}}$ は停止性をもつことを示すことができる．

5.2　組合せ子 B と C から得られる組合せ子

組合せ子 C は書き換え規則 $\mathsf{C}xyz \to xzy$ をもつ．次の組合せ子は B と C を組み合わせて定義できる [27].

$$\mathsf{Q}_0 xyzw \to xz(yw) \qquad \mathsf{Q}_2 xyz \to y(zx)$$
$$\mathsf{Q}_4 xyz \to z(yx) \qquad \mathsf{Q}_5 xyzw \to z(xyw)$$
$$\mathsf{Q}_6 xyzw \to w(xyz)$$

辞書式経路順序 $>_{lpo}$ を用いると，組合せ子 $\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_2, \mathsf{Q}_4, \mathsf{Q}_5, \mathsf{Q}_6$ は停止性をもつことを示すことができる．

5.3　組合せ子 B と M から得られる組合せ子

組合せ子 M は書き換え規則 $\mathsf{M}x \to xx$ をもつ．組合せ子 M_2 は書き換え規則 $\mathsf{M}_2 xy \to xy(xy)$ をもつ．組合せ子 M_2 は B と M から得られる [27].

補題 13　TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{M}_2 \cdot x \cdot y \to x \cdot y \cdot (x \cdot y)\}$ とする．このとき，TRS $\mathcal{R}$ は停止性をもたない．

(証明)　次の無限書き換え列より，$\mathcal{R}$ は停止性をもたない．$\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2) \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2)) \to_{\epsilon,\mathcal{R}} \mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2)) \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot (\mathsf{M}_2 \cdot \mathsf{M}_2))) \to_{1,\mathcal{R}} \cdots$.　□

5.4　組合せ子 B, T, M から得られる組合せ子

組合せ子 T は書き換え規則 $\mathsf{T}xy \to yx$ をもつ [27]．次の書き換え規則をもつ組合せ子 $\mathsf{P}, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \mathsf{P}_3$ は組合せ子 $\mathsf{B}, \mathsf{T}, \mathsf{M}$ により定義される [27].

$$\mathsf{P}xyz \to z(xyz) \quad \mathsf{P}_1xyz \to y(xxz) \quad \mathsf{P}_2xyz \to x(yyz)$$
$$\mathsf{P}_3xyz \to y(xzy)$$

例 14　TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{P} \cdot x \cdot y \cdot z \to z \cdot (x \cdot y \cdot z)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}$ が停止性をもつかは不明である．辞書式経路順序 $>_{lpo}$ を用いて TRS $\mathcal{R}$ の停止性を示すことはできない．AProVE [11] を用いると，停止性を示すことはできなかった (かもしれない) という結果が得られる[*1]．

補題 15　TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{P}_2 \cdot x \cdot y \cdot z \to x \cdot (y \cdot y \cdot z)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．

(証明) $C[\,] = x \cdot \square$ とすると，$\mathsf{P}_2 \cdot x \cdot (\mathsf{P}_2 \cdot x) \cdot z \to_{\mathcal{R}} C[\mathsf{P}_2 \cdot x \cdot (\mathsf{P}_2 \cdot x) \cdot z]$．よって，TRS $\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．□

辞書式経路順序 $>_{lpo}$ を用いると，P_1 は停止性をもつことを示すことができる．例 14 と同様に，P_3 が停止性をもつかは不明である．

5.5　組合せ子 B, C, W から得られる組合せ子

書き換え規則 $\mathsf{S}_0xyz \to xzyz$ をもつ組合せ子 S_0 は $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}$ により定義される [27]．また，書き換え規則 $\mathsf{S}'xyzw \to xywzw$ をもつ組合せ子 S' は S_0, B により定義される [27]．また，組合せ子 S は B, S' から得られる．

補題 16　TRS $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{S}_0 \cdot x \cdot y \cdot z \to x \cdot z \cdot y \cdot z\}$，$\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{S}' \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w \to x \cdot y \cdot w \cdot z \cdot w\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は停止性をもたない．

(証明) $\mathcal{R}_1$ は循環書き換え $\mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0 \to_{\mathcal{R}_1} \mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0 \cdot \mathsf{S}_0$ をもつ．また，$\mathcal{R}_2$ は循環書き換え $\mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}' \cdot \mathsf{S}'$ をもつ．よって，TRS $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は停止性をもたない．さらに，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもたない．□

5.6　組合せ子 B, S から得られる組合せ子

組合せ子 Φ は書き換え規則 $\Phi xyzw \to x(yw)(zw)$ をもち，B, S から得られる [27]．また，任意の $n \geq 0$ に対して，書き換え規則 $\Phi_n xyzw_1 \ldots w_n \to x(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)$ をもつ Φ_n は B, Φ から得られる [27]．例 14 と同様に，Φ, Φ_2 が停止性をもつかは不明である．

また，組合せ子 $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3$ も B, S から定義される [27]．$\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3$ はそれぞれ次の書き換え規則 $\mathsf{S}_1xyzw \to xyw(zw), \mathsf{S}_2xyzw \to xzw(yzw), \mathsf{S}_3xyzwv \to xy(zv)(wv)$ をもつ．例 14 と同様に，$\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3$ が停止性をもつかは不明である．

5.7　組合せ子 B, W から構成される不動点組合せ子

書き換え規則 $\mathsf{L}_1xyz \to x(yyz), \mathsf{M}_3xy \to xy(xy)(xy)$ をもつ組合せ子 $\mathsf{L}_1, \mathsf{M}_3$ は B, W から構成される [27]．$\mathsf{L}_1x(\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x) \to x((\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x))$ より，$\mathsf{L}_1x(\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x)$ は x の不動点である．また，$\mathsf{M}_3\mathsf{L}_1x \to \mathsf{L}_1x(\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x) \to x(\mathsf{L}_1x(\mathsf{L}_1x)(\mathsf{L}_1x)) \leftarrow x(\mathsf{M}_3\mathsf{L}_1x)$ より，$\mathsf{M}_3\mathsf{L}_1$ は不動点組合せ子である．

例 17　TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{L}_1 \cdot x \cdot y \cdot z \to x \cdot (y \cdot y \cdot z)\}$ とする．このとき，AProVe を用いて，$\mathcal{R}$ は停止性をもたないことが示された．次の反例は AProVE による反証結果を参考にして得られた．$C[\,] = x \cdot \square$ とすると，$\mathsf{L}_1 \cdot x \cdot (\mathsf{L}_1 \cdot x) \cdot z \to_{\mathcal{R}} C[\mathsf{L}_1 \cdot x \cdot (\mathsf{L}_1 \cdot x) \cdot z]$．よって，$\mathcal{R}$ は非基礎ループ性をもたない．

補題 18　TRS $\mathcal{R} = \{\mathsf{M}_3 \cdot x \cdot y \to x \cdot y \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}$ はω-強頭部正規化可能性をもつ．また，$\mathcal{R}$ は停止性をもたない．

(証明) いま，文献 [33] の行列解釈を用いると $\mathcal{R}$ の ω-強頭部正規化可能性が示せる．すなわち，組合せ子 M_3 は ω-強頭部正規化可能性をもつ．このとき，反証手続きは終了しない．さらに，次の無限書き換え列より，$\mathcal{R}$ は停止性をもたない．$\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3 \to_{\mathcal{R}} \mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3 \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3) \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{M}_3 \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3) \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3)) \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3)) \cdot (\mathsf{M}_3 \cdot \mathsf{M}_3) \to_{\mathcal{R}} \cdots$．□

5.8　n-不動点演算子

組合せ子 Γ は書き換え規則 $\Gamma xy \to xy(\Gamma xy)$ をもつ [27]．Γ を 2-不動点演算子とよぶ．2-不動点演算子 Γ は B, W から構成できる．

補題 19　TRS $\mathcal{R} = \{\Gamma \cdot x \cdot y \to x \cdot y \cdot (\Gamma \cdot x \cdot y)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．

(証明) $C[\,] = x \cdot y \cdot \square$ とすると，$\Gamma \cdot x \cdot y \to_{\mathcal{R}} C[\Gamma \cdot x \cdot y]$．よって，$\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．□

5.9　組合せ子 B, C, W から得られる組合せ子

組合せ子 $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{S}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は次の書き換え規則をもつ [27]．

$$\mathsf{e}_1xy \to xyx \qquad \mathsf{e}_2xy \to yxy$$
$$\mathsf{S}_4xyzwv \to z(xwv)(ywv)$$
$$\mathcal{C}_1zxy \to z(yxy)(xyx) \qquad \mathcal{C}_2zxy \to z(xyx)(yxy)$$
$$\mathcal{D}_1xyzw \to xz(yw)(xz) \qquad \mathcal{D}_2xyzw \to xw(yz)(xw)$$

これらの組合せ子は $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}$ から構成される．

補題 20　TRS $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{e}_1 \cdot x \cdot y \to x \cdot y \cdot x\}$，$\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{e}_2 \cdot x \cdot y \to y \cdot x \cdot y\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は停止性をもたない．

(証明) $\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 \to_{\mathcal{R}_1} \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1$ より，$\mathcal{R}_1$ は停止性をもたない．また，$\mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_2 \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_2$ より，$\mathcal{R}_2$ は停止性をもたない．さらに，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもたない．□

例 14 と同様に，$\mathsf{S}_4, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ が停止性をもつかは不明である．また，例 17 と同様に，$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ は停止性と非基礎ループ

[*1] 正確には，"Termination could not be shown (Maybe)" と出力される．

性をもたない．

5.10　弱二重不動点性質

集合 A 上に A の要素の任意の組 (x, y) を xy に写す演算が定義されているとき，適用可能システム $\mathcal{A}$ とよぶ．xy を x を y へ適用した結果とよぶ．任意の要素 a_1, a_2 に対して，$a_1b_1b_2 = b_1$ かつ $a_2b_1b_2 = b_2$ を満たす要素 b_1, b_2 が存在するとき，適用可能システム $\mathcal{A}$ は弱二重不動点性質をもつという．また，組 (b_1, b_2) を組 (a_1, a_2) の二重不動点とよぶ [27]．組合せ子 α_1, α_2 はそれぞれ書き換え規則 $\alpha_1 zxy \to x(yy)(zzxy), \alpha_2 zwxy \to w(yy)(zxy)$ をもつ．このとき，$\mathcal{A}$ は弱二重不動点性質をもつ．

補題 21　TRS $\mathcal{R} = \{\alpha_1 \cdot z \cdot x \cdot y \to x \cdot (y \cdot y) \cdot (z \cdot z \cdot x \cdot y)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．

(証明) $C[\,] = x \cdot (y \cdot y) \cdot \Box$ とすると，$\alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot x \cdot y \to_{\mathcal{R}} C[\alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot x \cdot y]$．よって，$\mathcal{R}$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．　□

例 17 と同様に，α_2 は停止性と非基礎ループ性をもたない．

5.11　良組合せ子と対称的組合せ子

書き換え規則 $\mathsf{N}zxy \to z(\mathsf{N}xxy)(\mathsf{N}yxy)$ をもつ組合せ子 N を良組合せ子という [27]．また，書き換え規則 $\mathsf{s}xy \to x(\mathsf{s}xy)(\mathsf{s}yx)$ をもつ組合せ子 s を対称的組合せ子という [27]．組合せ子 N, s は $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}$ から構成することができる．

補題 22　TRS $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{N} \cdot z \cdot x \cdot y \to z \cdot (\mathsf{N} \cdot x \cdot x \cdot y) \cdot (\mathsf{N} \cdot y \cdot x \cdot y)\}, \mathcal{R}_2 = \{\mathsf{s} \cdot x \cdot y \to x \cdot (\mathsf{s} \cdot x \cdot y) \cdot (\mathsf{s} \cdot y \cdot x)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．

(証明) $C[\,] = \mathsf{N} \cdot \Box \cdot (\mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N})$ とすると，$\mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \to_{\mathcal{R}_1} C[\mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N} \cdot \mathsf{N}]$．$C[\,] = \mathsf{s} \cdot \Box \cdot (\mathsf{s} \cdot \mathsf{s} \cdot \mathsf{s})$ とすると，$\mathsf{s} \cdot \mathsf{s} \cdot \mathsf{s} \to_{\mathcal{R}_2} C[\mathsf{s} \cdot \mathsf{s} \cdot \mathsf{s}]$．よって，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ は停止性と非基礎ループ性をもたない．　□

5.12　反証結果，停止性，非基礎ループ性のまとめ

上記の補題から以下の定理が成り立つ．

定理 23　組合せ子 $Z \in \{\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \mathsf{D}_3, \hat{\mathsf{E}}, \mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_2, \mathsf{Q}_4, \mathsf{Q}_5, \mathsf{Q}_6, \mathsf{P}, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \mathsf{S}_0, \mathsf{S}', \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3, \mathsf{L}_1, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{S}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \alpha_2, \mathsf{N}\}$ に対して，反証手続きは成功する．すなわち，組合せ子 Z は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

定理 24　組合せ子 M_3 は ω-強頭部正規化可能性をもつ．

定理 25　組合せ子 $Z \in \{\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \mathsf{D}_3, \hat{\mathsf{E}}, \mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_2, \mathsf{Q}_4, \mathsf{Q}_5, \mathsf{Q}_6, \mathsf{P}_1\}$ は停止性と非基礎ループ性をもつ．

組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証結果は表 1 にまとめる．なお，表中では組合せ子の適用演算子 $\cdot$ は省略している．表下段の組合せ子 M_3 の書き換え規則は定理 24 から ω-強頭部正規化可能性をもつため，反証には成功しない．また，組合せ子の停止性と非基礎ループ性については表 2 にまとめる．停止性は 10 例が AProVE を用いても，証明できなかった (かもしれない) という結果が得られた．AProVE は通常の有限項（代数的項）上の TRS の停止性の証明には比較的強力であるが，組合せ子の書き換え規則からなる TRS，すなわち適用可能項上の TRS の停止性の証明にはあまり強力ではない．TRS の停止性は書き換え規則が 1 つの場合でも一般的に決定不能であることが証明されており [7]，AProVE も万能ではない．実際，文献 [25] において，多項式解釈を用いて停止性をもつことが証明されている組合せ子 J の書き換え規則を AProVE に入力すると，停止性の証明ができなかった (かもしれない) という結果が得られる．本研究では，組合せ子 J の多項式解釈による手法を，AProVE を用いて停止性が示せなかった 10 例に適用したがすべて失敗した．各組合せ子に対して多項式解釈を変更する必要がある．Plaisted は TRS の非循環性が一般的に決定不能であることを示している [24]．一方，Ketema らは直交 TRS が弱停止性をもつならば非循環性をもつことを示している [16]．しかしながら，書き換え規則が 1 つの TRS の非循環性の決定不能性問題は未解決であると考えられる．さらに，非循環性をより一般的にした性質として非ループ性があるが，Middeldorp らは書き換え規則が 1 つの TRS の場合でも非ループ性が決定不能であることを証明している [20]．彼らの非ループ性の決定不能性の証明から非基礎ループ性も決定不能であることがわかる．しかしながら，Giesl ら [10] の TRS のループを見つけて停止性の反証をする機構は強力である．その機構は AProVE に実装されている．本研究でも 4 例の基礎ループが AProVE において発見された．

6.　組合せ子 $\mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3, \Phi, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \Phi_2, \mathsf{S}_4$ の非基礎ループ性

文献 [14] では，Waldmann が組合せ子 S の非基礎ループ性を示すために提案した手法 [32] を適用して，組合せ子 O の非基礎ループ性を示している．本節では，組合せ子 S, O の非基礎ループ性の証明手法 [14], [32] を一般化して，組合せ子 $\mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3, \Phi, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \Phi_2, \mathsf{S}_4$ の非基礎ループ性を示す．

最初に，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ の書き換え規則からなる TRS $\mathcal{R}(Z)$ からラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(Z)$ を得るために，統一的にラベル付けする方法を定義する．次に，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ が非基礎ループ性をもつことを統一的に示す．さらに，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{M}_3, \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_4\}$ に対するラベル付けの方法を新たに与え，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{M}_3, \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_4\}$ が非基礎ループ性をもつことを統一的に示す．

定義 26　$Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．TRS $\mathcal{R}(Z)$ の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))$ を定数 Z と 2 引数関数記号 $\circ$ からなる集合とし，組合せ子の書き換え規則を $\circ$ を用いて中

表 1 組合せ子の書き換え規則に対する ω-強頭部正規化可能性の反証

Table 1 Disproving of ω-strong head normalization for rewrite rules of combinators.

番号	組合せ子	書き換え規則	結果	ステップ数	構成された反例
1	B_2	$\mathsf{B}_2xyzw \to x(yzw)$	○	1	$\mathsf{B}_2(\mu x.\mathsf{B}_2xy'z')yzw$
2	B_3	$\mathsf{B}_3xyzwv \to x(yzwv)$	○	1	$\mathsf{B}_3(\mu x.\mathsf{B}_3xy'z'w')yzwv$
3	D_1	$\mathsf{D}_1xyzwv \to xyz(wv)$	○	1	$\mathsf{D}_1(\mu x.\mathsf{D}_1xy')yzwv$
4	D_2	$\mathsf{D}_2xyzw \to x(y(zw))$	○	1	$\mathsf{D}_2(\mu x.\mathsf{D}_2xy'z')yzw$
5	D_3	$\mathsf{D}_3xyzwv \to x(yz)(wv)$	○	1	$\mathsf{D}_3(\mu x.\mathsf{D}_3xy'z')yzwv$
6	$\hat{\mathsf{E}}$	$\hat{\mathsf{E}}xy_1y_2y_3z_1z_2z_3 \to x(y_1y_2y_3)(z_1z_2z_3)$	○	1	$\hat{\mathsf{E}}(\mu x.\hat{\mathsf{E}}xy'_1y'_2y'_3z'_1)y_1y_2y_3z_1z_2z_3$
7	Q_0	$\mathsf{Q}_0xyzw \to xz(yw)$	○	1	$\mathsf{Q}_0(\mu x.\mathsf{Q}_0xy')yzw$
8	Q_2	$\mathsf{Q}_2xyz \to y(zx)$	○	1	$\mathsf{Q}_2x(\mu y.\mathsf{Q}_2x'y)z$
9	Q_4	$\mathsf{Q}_4xyz \to z(yx)$	○	2	$\mathsf{Q}_4(\mu y.\mathsf{Q}_4y)(\mu y.\mathsf{Q}_4y)((\mu y.\mathsf{Q}_4y)(\mu y.\mathsf{Q}_4y))$
10	Q_5	$\mathsf{Q}_5xyzw \to z(xyw)$	○	1	$\mathsf{Q}_5xy(\mu z.\mathsf{Q}_5x'y'z)w$
11	Q_6	$\mathsf{Q}_6xyzw \to w(xyz)$	○	2	$\mathsf{Q}_6(\mu x.\mathsf{Q}_6x)yz(\mathsf{Q}_6(\mu x.\mathsf{Q}_6x)y_1z_1)$
12	M_2	$\mathsf{M}_2xy \to xy(xy)$	×	2	—
13	P	$\mathsf{P}xyz \to z(xyz)$	×	2	—
14	P_1	$\mathsf{P}_1xyz \to y(xxz)$	○	1	$\mathsf{P}_1x(\mu y.\mathsf{P}_1yy)z$
15	P_2	$\mathsf{P}_2xyz \to x(yyz)$	○	1	$\mathsf{P}_2(\mu x.\mathsf{P}_2xy')yz$
16	P_3	$\mathsf{P}_3xyz \to y(xzy)$	○	1	$\mathsf{P}_3x(\mu y.\mathsf{P}_3x'y)z$
17	S_0	$\mathsf{S}_0xyz \to xzyz$	○	1	$\mathsf{S}_0\mathsf{S}_0y\mathsf{S}_0$
18	S'	$\mathsf{S}'xyzw \to xywzw$	○	1	$\mathsf{S}'\mathsf{S}'\mathsf{S}'\mathsf{S}'\mathsf{S}'$
19	Φ	$\Phi xyzw \to x(yw)(zw)$	○	1	$\Phi(\mu x.\Phi xy')yzw$
20	Φ_2	$\Phi_2xyzw_1w_2 \to x(yw_1w_2)(zw_1w_2)$	○	1	$\Phi_2(\mu x.\Phi_2xy'z')yzw_1w_2$
21	S_1	$\mathsf{S}_1xyzw \to xyw(zw)$	○	1	$\mathsf{S}_1(\mu x.\mathsf{S}_1x)yzw$
22	S_2	$\mathsf{S}_2xyzw \to xzw(yzw)$	○	1	$\mathsf{S}_2(\mu x.\mathsf{S}_2x)yzw$
23	S_3	$\mathsf{S}_3xyzwv \to xy(zv)(wv)$	○	1	$\mathsf{S}_3(\mu x.\mathsf{S}_3xy')yzwv$
24	L_1	$\mathsf{L}_1xyz \to x(yyz)$	○	1	$\mathsf{L}_1(\mu x.\mathsf{L}_1xy')yz$
25	Γ	$\Gamma xy \to xy(\Gamma xy)$	×	2	—
26	e_1	$\mathsf{e}_1xy \to xyx$	○	1	$\mathsf{e}_1\mathsf{e}_1\mathsf{e}_1$
27	e_2	$\mathsf{e}_2xy \to yxy$	○	1	$\mathsf{e}_2\mathsf{e}_2\mathsf{e}_2$
28	S_4	$\mathsf{S}_4xyzwv \to z(xwv)(ywv)$	○	1	$\mathsf{S}_4xy(\mu z.\mathsf{S}_4zzz)wv$
29	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1zxy \to z(yxy)(xyx)$	○	1	$\mathcal{C}_1(\mu z.\mathcal{C}_1z)xy$
30	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2zxy \to z(xyx)(yxy)$	○	1	$\mathcal{C}_2(\mu z.\mathcal{C}_2z)xy$
31	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1xyzw \to xz(yw)(xz)$	○	1	$\mathcal{D}_1(\mu x.\mathcal{D}_1x)yzw$
32	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2xyzw \to xw(yz)(xw)$	○	1	$\mathcal{D}_2(\mu x.\mathcal{D}_2x)yzw$
33	α_1	$\alpha_1zxy \to x(yy)(zzxy)$	×	2	—
34	α_2	$\alpha_2zwxy \to w(yy)(zxy)$	○	2	$\alpha_2(\alpha_2z_2w_2)(\mu w.\alpha_2(\alpha_2z'_2w'_2)w)x_2y_2$
35	N	$\mathsf{N}zxy \to z(\mathsf{N}xxy)(\mathsf{N}yxy)$	○	1	$\mathsf{N}(\mu z.\mathsf{N}z)xy$
36	s	$\mathsf{s}xy \to x(\mathsf{s}xy)(\mathsf{s}yx)$	×	2	—
37	M_3	$\mathsf{M}_3xy \to xy(xy)(xy)$	×	2	—

(○：成功 (本研究)，×：発散 (本研究))

値記法で表す．$\circ$ は左結合であることを明示するため，適宜括弧をつける．TRS $\mathcal{R}(Z)=\{L\to R\}$ と表す．

例 27 TRS $\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)$ の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathsf{M}_2))$ を定数 M_2 と 2 引数関数記号 $\circ$ からなる集合とし，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)$ は以下の通り定義される：$\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)=\{(\mathsf{M}_2\circ x)\circ y\to(x\circ y)\circ(x\circ y)\}$．

定義 28 (根記号のラベル) $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)))\setminus\{Z\}$ におけるラベル付き項の**根記号のラベル**を次のように定義する：$root(t)=\circ_k$ のとき，$label(t)=k$．

定義 29 (ラベル付け 1) $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．ラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(Z)$ は無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z))=\{Z,\circ_1,\circ_2,\ldots,\circ_n,\circ_{n+1},\ldots\}$ をもつ．ここで，任意の $i\geq 1$ に対して $\circ_i$ はラベル付き 2 引数関数記号である．ラベル付き TRS を $\mathcal{R}_n(Z)=\{L'\to R'\mid 1\leq k\leq n,1\leq l\}$ と表す．

TRS $\mathcal{R}(Z)=\{L\to R\}$ の 2 引数関数記号 $\circ$ に対するラベル付けは次の通りに行う．ここで，$1\leq k\leq n,1\leq l$ とする．

(1) 左辺 L に対するラベル付け．$label(L')=k$ とし，L の根記号以外の関数記号 $\circ$ にはラベル l を付ける．

(2) 右辺 R に対するラベル付け．$label(R')=k+1$．任意の $i\in\{1,2\}$ に対して，$root(R|_i)=\circ$ ならば $label(R'|_i)=k$．任意の $i\in\{11,12,21,22\}$ に対して，$root(R|_i)=\circ$ ならば $label(R'|_i)=l$．それ以外の位置 $p\in Pos(R)$ に対して，$root(R|_p)=\circ$ ならば $label(R|_p)=l$．

例 30 定義 29 の通りに定義されるラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)$ は無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2))=\{\mathsf{M}_2,\circ_1,\circ_2,\ldots,\circ_n,\circ_{n+1},\ldots\}$ をもつ：$\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)=\{(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_k y\to(x\circ_k y)\circ_{k+1}(x\circ_k y)\mid 1\leq k\leq n,1\leq l\}$．

ここで，$\circ_{n+1}$ を左辺の根記号とする書き換え規則は存在しない．また，$i\leq j$ ならば，$\mathcal{R}_i(Z)\subseteq\mathcal{R}_j(Z)$ であることに注意する．

補題 31 $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．任意の $n\geq 1$ に対して，$\mathcal{R}_n(Z)$ は停止性をもつ．

(証明) 無限の関数記号集合に対して，再帰経路順序 $>_{rpo}$ が整礎であるためには少なくても関数記号上の半順序が整礎であることが必要である [21]．そこで，無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z))$ 上の整礎な半順序 $>$ を次のように与える：$\circ_1>\circ_2>\cdots>\circ_n>\circ_{n+1}$．このとき，再帰経路順序 $>_{rpo}$([1], [22]) を用いて，$\mathcal{R}_n(Z)$ の停止性を示すことができる．いま $Z=\mathsf{M}_2$ とする．このとき，任意の $n\geq 1$ に対して，任意の $(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_k y\to(x\circ_k y)\circ_{k+1}(x\circ_k y)\in\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)$ について，$(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_k y>_{rpo}(x\circ_k y)\circ_{k+1}(x\circ_k y)$ が成り立つことを n に関する帰納法により示す．$n=1$ のとき．$\mathcal{R}_1(\mathsf{M}_2)=\{(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_1 y\to(x\circ_1 y)\circ_2(x\circ_1 y)\mid 1\leq l\}$ より，$(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_1 y>_{rpo}(x\circ_1 y)\circ_2(x\circ_1 y)$．$n=m+1$ のとき．$\mathcal{R}_{m+1}(\mathsf{M}_2)=\mathcal{R}_m(\mathsf{M}_2)\cup\{(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_{m+1} y\to(x\circ_{m+1} y)\circ_{m+2}(x\circ_{m+1} y)\mid 1\leq l\}$．帰納法の仮定から，任意の $l\to r\in\mathcal{R}_m(\mathsf{M}_2)$ に対して，$l>_{rpo}r$．さらに，$(\mathsf{M}_2\circ_l x)\circ_{m+1} y>_{rpo}(x\circ_{m+1} y)\circ_{m+2}(x\circ_{m+1} y)$．よって，$\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)$ は停止性をもつ．他の組合せ子の場合も同様に示すことができる． □

定義 29 の方法でラベル付けすると，組合せ子 $\mathsf{M}_3,\mathsf{P}_3,\Phi,\Phi_2,\mathsf{S}_3,\mathsf{S}_4,\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ に対するラベル付き TRS の停止性は再帰経路順序により示すことができない．

次に，文献 [32] にならって，組合せ子 Z からなる項に対する右側の深さを定義する．

定義 32 (右側の深さ [32]) $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ または $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)))$ における項の**右側の深さ**を次のように定義する：$d_r(Z)=0,d_r(X\circ_l Y)=1+d_r(Y)$．

次の補題は組合せ子 $\mathsf{P}_3,\mathcal{D}_1$ の場合は成立しないことに注意する．

補題 33 $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)))\ni X\to_{\mathcal{R}_n(Z)}Y$ ならば，$d_r(X)\leq d_r(Y)$．

(証明) いま，$Z=\mathsf{M}_2$ とする．$X=C[\Delta]=C[(\mathsf{M}_2\circ_l A)\circ_k B]\to^{\Delta}_{\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)}C[(A\circ_k B)\circ_{k+1}(A\circ_k B)]=C[\Delta']=Y$ とおき，基礎 M_2-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．$C[\,]=\Box$ のとき．$d_r(X)=1+d_r(B),d_r(Y)=1+d_r(A\circ_k B)=2+d_r(B)$ より明らか．$C[\,]=X'\circ D[\,]$ のとき．帰納法の仮定より，$d_r(X)=1+d_r(D[\Delta])\leq 1+d_r(D[\Delta'])=d_r(Y)$．$C[\,]=D[\,]\circ X'$ のとき．$d_r(X)=1+d_r(X')=d_r(Y)$ より明らか．他の組合せ子についても同様に示せる． □

定義 34 (無矛盾性 [32]) $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．次の条件が成立するとき，ラベル付き項 X が**無矛盾**であるという：$X'\neq Z$ である任意の $X'\trianglelefteq X$ に対して，$d_r(X')\geq label(X')$．

定義から，無矛盾な項の部分項は明らかに無矛盾である．また，無矛盾性は TRS $\mathcal{R}_n(Z)$ における書き換えで保存される．

次の補題は，組合せ子 $\Phi_2,\mathsf{S}_3,\mathcal{D}_2,\mathsf{S}_4$ の場合は成立しないことに注意する．

補題 35 $Z\in\{\mathsf{S},\mathsf{O},\mathsf{M}_2,\mathsf{P},\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2\}$ とする．$X\in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)))$ が無矛盾かつ $X\to_{\mathcal{R}_n(Z)}Y$ ならば，Y は無矛盾である．

(証明) いま，$Z=\mathsf{M}_2$ とする．X が無矛盾かつ $X=C[\Delta]=C[(\mathsf{M}_2\circ_l A)\circ_k B]\to^{\Delta}_{\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)}C[(A\circ_k B)\circ_{k+1}(A\circ_k B)]=C[\Delta']=Y$ とおき，基礎 M_2-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により，Y が無矛盾であることを示す．

1. $C[\,]=\Box$ のとき．X の無矛盾性から，部分項 A,B は無矛盾である．よって，$d_r(A\circ_k B)\geq label(A\circ_k B)$ かつ $d_r(Y)\geq label(Y)$ を示せば十分である．X の無矛盾性から，$1+d_r(B)=d_r(X)\geq label(X)=k$．これを用いて，$d_r(A\circ_k B)=1+d_r(B)\geq k=label(A\circ_k B)$．さらに，$d_r(Y)=2+d_r(B)\geq k+1=label(Y)$．

2. $C[\,] = X' \circ_p D[\,]$ のとき．このとき，$X = X' \circ_p D[\Delta]$ の無矛盾性から $X', D[\Delta]$ は無矛盾である．また，$D[\Delta]$ は無矛盾かつ $D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)} D[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D[\Delta']$ も無矛盾である．よって，$d_r(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．いま，$D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)} D[\Delta']$ であるから，補題 33 より $d_r(D[\Delta]) \leq d_r(D[\Delta'])$．よって，$d_r(Y) = 1 + d_r(D[\Delta']) \geq 1 + d_r(D[\Delta]) = d_r(X) \geq label(X) = p = label(Y)$．

3. $C[\,] = D[\,] \circ_p X'$ のとき．このとき，$X = D[\Delta] \circ_p X'$ の無矛盾性から $D[\Delta], X'$ は無矛盾である．また，$D[\Delta]$ は無矛盾かつ $D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_2)} D[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D[\Delta']$ は無矛盾である．よって，$d_r(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．これは，$d_r(X) \geq label(X)$ より $d_r(Y) = 1 + d_r(X') = d_r(X)$ かつ $label(X) = label(Y)$ から明らか．他の組合せ子についても同様に示せる． □

定義 36 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．写像 $tag : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)))$ を，葉ではない任意の部分項 X の根記号 $\circ$ をラベル付き記号 $\circ_{d_r(X)}$ で置き換えると定義する．

定義 37 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．写像 $forget : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ を，すべてのラベル付き記号 $\circ_l$ を $\circ$ で置き換えると定義する．

補題 38 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．ある $n \geq 1$ に対して，$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z))) \ni X \to_{\mathcal{R}_n(Z)} Y$ ならば，$forget(X) \to_{\mathcal{R}(Z)} forget(Y)$．

(証明) 定義 29 と定義 37 から，明らか． □

補題 39 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．項 $X \in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ とラベル付き項 X' を考える．$forget(X') = X \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(Z)} Y$ かつ X' が無矛盾ならば，$X' \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(Z)} Y'$ かつ $forget(Y') = Y$ を満たす Y' が存在する．

(証明) いま，$Z = \mathsf{M}_2$ とする．$forget(X') = X \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)} Y$ より，$X = C[\Delta] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)} C[\Gamma] = Y$ を満たす基礎 M_2-文脈 $C[\,]$ が存在する．$\Delta = (\mathsf{M}_2 \circ A) \circ B$ とする．$C[\Delta] = C[(\mathsf{M}_2 \circ A) \circ B] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathsf{M}_2)} C[(A \circ B) \circ (A \circ B)] = C[\Gamma]$．$X'$ が無矛盾より，$X'' \neq \mathsf{M}_2$ である任意の $X'' \trianglelefteq X'$ に対して，$d_r(X'') \geq label(X'')$．$forget(X') = X = C[\Delta]$ より，$forget(\Delta') = \Delta$ を満たす $\Delta' \trianglelefteq X'$ が存在する．$forget(\Delta') = \Delta$ より，$\Delta' = (\mathsf{M}_2 \circ_{L_1} A') \circ_{L_2} B'$ と表すことができる．無矛盾な項の部分項は無矛盾より，$\Delta' \trianglelefteq X'$ に対して，$d_r(\Delta') \geq label(\Delta')$．$label(\Delta') \leq d_r(\Delta') = d_r(\Delta)$．$L_2 = label(\Delta') \leq d_r(\Delta)$ より，Δ' は $\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(\mathsf{M}_2)$ のリデックスである．$\Delta' \trianglelefteq X'$ より，$X' = C'[\Delta']$ かつ $forget(C'[\,]) = C[\,]$ を満たすラベル付き基礎 M_2-文脈 $C'[\,]$ が存在する．$Y' = C'[(A' \circ_{L_2} B') \circ_{L_2+1} (A' \circ_{L_2} B')]$ とすると，$X' = C'[\Delta'] = C'[(\mathsf{M}_2 \circ_{L_1} A') \circ_{L_2} B'] \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(\mathsf{M}_2)} C'[(A' \circ_{L_2} B') \circ_{L_2+1} (A' \circ_{L_2} B')] = C'[\Delta'] = Y'$ かつ $forget(Y') = C[(A \circ B) \circ (A \circ B)] = Y$ を満たす．他の組合せ子についても同様に示せる． □

補題 40 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．$\mathcal{R}(Z)$ 上の有限または無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が存在し，任意の $k \geq 1$ に対して，$d_r(\Delta_k) \leq n$ と仮定する．このとき，$X'_1 = tag(X_1)$ かつ任意の $k \geq 1$ に対して $forget(X'_k) = X_k$ を満たす $\mathcal{R}_n(Z)$ 上の有限または無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} \cdots$ が存在する．

(証明) 写像 tag と $forget$ の定義から，$forget(X'_1) = X_1$．また，X'_1 は定義より，無矛盾である．したがって，$X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} \cdots \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_i$，任意の $1 \leq k \leq i$ に対して $forget(X'_k) = X_k$ かつ X'_i は無矛盾とするとき，$X'_i \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_{i+1}$，$forget(X'_{i+1}) = X_{i+1}$ かつ X'_{i+1} は無矛盾性を満たす X'_{i+1} が存在することを示せば十分である．いま，仮定より，$forget(X'_i) = X_i$，$X_i \to^{\Delta_i}_{\mathcal{R}(Z)} X_{i+1}$ かつ X'_i が無矛盾であるから，補題 39 より，$X'_i \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta_i)}(Z)} X'_{i+1}$ かつ $forget(X'_{i+1}) = X_{i+1}$ を満たす X'_{i+1} が存在する．仮定 $d_r(\Delta_i) \leq n$ より，$\mathcal{R}_{d_r(\Delta_i)}(Z) \subseteq \mathcal{R}_n(Z)$．よって，$X'_i \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_{i+1}$．また，$X'_i$ の無矛盾性と補題 35 より，X'_{i+1} は無矛盾である． □

補題 41 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．$\mathcal{R}(Z)$ 上の無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が存在すると仮定する．このとき，任意の $k \geq 1$ に対して $d_r(\Delta_k)$ は有界ではない．

(証明) 任意の $k \geq 1$ に対して $d_r(\Delta_k)$ は有界である，すなわち，任意の $k \geq 1$ に対して $d_r(\Delta_k) \leq n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する．補題 40 より，$\mathcal{R}_n(Z)$ 上の無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} X'_3 \to_{\mathcal{R}_n(Z)} \cdots$ が存在する．しかしながら，補題 31 より，$\mathcal{R}_n(Z)$ は停止性をもつ．したがって，$\mathcal{R}_n(Z)$ は無限書き換え列をもたない．よって，矛盾する． □

定理 42 $Z \in \{\mathsf{S}, \mathsf{O}, \mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2\}$ とする．TRS $\mathcal{R}(Z)$ は非基礎ループ性をもつ．

(証明) 基礎ループ $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X \to^{+}_{\mathcal{R}(Z)} C[X]$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{R}(Z)$ 上の無限書き換え列 $X = X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots X_n \to^{\Delta_n}_{\mathcal{R}(Z)} C[X_1] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} C[X_2] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots C[X_n] \to^{\Delta_n}_{\mathcal{R}(Z)} C[C[X_1]] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} C[C[X_2]] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が得られる．$\mathcal{R}(Z)$-リデックス Δ_k は有限個であるから，$d_r(\Delta_k) \leq m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する $(1 \leq k \leq n)$．これは補題 41 に矛盾する． □

定義 29 の手法を用いて，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{M}_3), \mathcal{R}(\Phi), \mathcal{R}(\Phi_2), \mathcal{R}(\mathsf{S}_4)$ にラベル付けして得られるラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_3), \mathcal{R}_n(\Phi), \mathcal{R}_n(\Phi_2), \mathcal{R}_n(\mathsf{S}_4)$ は再帰経路順序を用いて停止性を示すことができない．よって，他のラベル付けを考える必要がある．

定義 43 （ラベル付け 2）$Z \in \{\mathsf{M}_3, \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_4\}$ とする．ラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(Z)$ は無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(Z)) = \{Z, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n, \circ_{n+1}, \ldots\}$ をもつ．ここで，任意の $i \geq 1$ に対して $\circ_i$ はラベル付き 2 引数関数記号である．ラベル付

き TRS を $\mathcal{R}_n(Z) = \{L' \to R' \mid 1 \le k \le n, 1 \le l\}$ と表す．TRS $\mathcal{R}(Z) = \{L \to R\}$ の 2 引数関数記号 $\circ$ に対するラベル付けは次の通りに行う．ここで，$1 \le k \le n, 1 \le l$ とする．

(1) 左辺 L に対するラベル付け．$label(L') = k$ とし，L の根記号以外の関数記号 $\circ$ にはラベル l を付ける．

(2) 右辺 R に対するラベル付け．$label(R') = k+1$．$root(R|_1) = \circ$ ならば $label(R'|_1) = k+1$．$root(R|_2) = \circ$ ならば $label(R'|_2) = k$．任意の $i \in \{11, 12\}$ に対して，$root(R|_i) = \circ$ ならば $label(R'|_i) = k$．それ以外の位置 $p \in Pos(R)$ に対して，$root(R|_p) = \circ$ ならば $label(R|_p) = l$．

例 44 定義 43 の通りに定義されるラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_3)$ は無限の関数記号 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_3)) = \{\mathsf{M}_3, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n, \circ_{n+1}, \ldots\}$ をもつ：$\mathcal{R}_n(\mathsf{M}_3) = \{(\mathsf{M}_3 \circ_l x) \circ_k y \to ((x \circ_k y) \circ_{k+1} (x \circ_k y)) \circ_{k+1} (x \circ_k y) \mid 1 \le k \le n, 1 \le l\}$．

以降は，上記の場合と同様に証明することができる．

定理 45 $Z \in \{\mathsf{M}_3, \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_4\}$ とする．TRS $\mathcal{R}(Z)$ は，非基礎ループ性をもつ．

7. 組合せ子の非循環性

本節で扱う組合せ子は文献 [27] で紹介されているものである．本節では，文献 [14] の手法に基づいて，組合せ子の非循環性を示す．

定義 46 ([14]) $s \in CL(Z)$ とする．s の**長さ** $|s|$ を次のように再帰的に定義する：(1) $|Z| = 1$, (2) $|(st)| = |s| + |t|$．s の**重み** $||s||$ を次のように再帰的に定義する：(1) $||Z|| = 1$, (2) $||(st)|| = 2||s|| + ||t||$．

命題 47 ([14]) (1) 組合せ子 Z の書き換え規則を $Zx_1 \ldots x_n \to t$ とするとき，任意の $u_i \in CL(Z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して，$|Zu_1 \ldots u_n| \le |t\{x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n\}|$．(2) $s = C[\Delta] \to C[\Delta'] = t$ かつ $|s| = |t|$ $(s, t \in CL(Z))$ ならば $||\Delta|| > ||\Delta'||$．ここで，Δ は Z-リデックスとする．このとき，2 つの条件 (1), (2) を満たす組合せ子 Z は，$CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

定理 48 組合せ子 Z の書き換え規則を $Zx_1 \ldots x_n \to t$ とするとき，任意の $u_i \in CL(Z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して，$|Zu_1 \ldots u_n| < |t\{x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n\}|$．このとき，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

(証明) 循環書き換え $t \to^+ t$ が存在すると仮定する．ここで，$t \in CL(Z)$．このとき，$|t| < |t|$ より矛盾する．よって，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ． $\square$

補題 49 (組合せ子 M_2) 組合せ子 M_2 は $CL(\mathsf{M}_2)$ 上の非循環性をもつ．

(証明) 任意の $u_1, u_2 \in CL(\mathsf{M}_2)$ に対して，$|\mathsf{M}_2 u_1 u_2| < |u_1 u_2 (u_1 u_2)|$．よって，定理 48 より，自明． $\square$

補題 50 (組合せ子 P) 組合せ子 P は $CL(\mathsf{P})$ 上の非循環性をもつ．

(証明) (1) 任意の $u_1, u_2, u_3 \in CL(\mathsf{P})$ に対して，$|\mathsf{P}u_1u_2u_3| \le |u_3(u_1u_2u_3)|$．(2) 任意の $s, t \in CL(\mathsf{P})$ に対して，$s \to t$ とする．ある $u_1, u_2, u_3 \in CL(\mathsf{P})$ に対して，$s = C[\mathsf{P}u_1u_2u_3]$，$t = C[u_3(u_1u_2u_3)]$ と表される．このとき，$|s| = |t|$ を満たすならば，$u_3 = \mathsf{P}$ が成り立つことを基礎 P-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．

1. $C[\,] = \square$ のとき．$s = \mathsf{P}u_1u_2u_3 \to u_3(u_1u_2u_3) = t$．$|s| = |t|$ より，$|u_3| = 1$．すなわち，$u_3 = \mathsf{P}$ である．
2. $C[\,] = (u_4 C'[\,])$ のとき．$s = (u_4 C'[\mathsf{P}u_1u_2u_3]) \to (u_4 C'[u_3(u_1u_2u_3)]) = t$．$|s| = |t|$ から，$|C'[\mathsf{P}u_1u_2u_3]| = |C'[u_3(u_1u_2u_3)]|$．帰納法の仮定より，$u_3 = \mathsf{P}$．
3. $C[\,] = (C'[\,]u_4)$ のとき．前項と同様．

したがって，任意の $u_1, u_2 \in CL(\mathsf{P})$ に対して，$||\mathsf{P}u_1u_2\mathsf{P}|| > ||\mathsf{P}(u_1u_2\mathsf{P})||$．よって，命題 47 から，組合せ子 P は $CL(\mathsf{P})$ 上の非循環性をもつ． $\square$

例 51 組合せ子 P_3 が非循環性をもつかは不明である．以下の通り組合せ子 P_3 は命題 47 の条件 (2) を満たさない．$||\mathsf{P}_3u_1\mathsf{P}_3u_3|| = 10 + 4||u_1|| + ||u_3|| \not> 3 + 4||u_1|| + 2||u_3|| = ||\mathsf{P}_3(u_1u_3\mathsf{P}_3)||$．よって，命題 47 を適用できない．

補題 52 $Z \in \{\mathsf{P}_2, \Phi, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_3, \mathsf{L}_1\}$ とする．このとき，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

(証明) 補題 50 と同様に示せる． $\square$

補題 53 $Z \in \{\Phi_2, \mathsf{S}_2, \Gamma, \mathsf{S}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \alpha_1, \alpha_2, \mathsf{N}, \mathsf{s}, \mathsf{M}_3\}$ とする．このとき，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

(証明) 補題 49 と同様に示せる． $\square$

上記の補題から以下の定理が成り立つ．

定理 54 ここで, $Z \in \{\mathsf{M}_2, \mathsf{P}, \mathsf{P}_2, \Phi, \Phi_2, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3, \mathsf{L}_1, \Gamma, \mathsf{S}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \alpha_1, \alpha_2, \mathsf{N}, \mathsf{s}, \mathsf{M}_3\}$ とする．このとき，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

停止性をもつ組合せ子は明らかに非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもつ．組合せ子の非循環性に関する結果は表 2 にまとめる．

8. おわりに

本論文では，無限項上の項書き換えシステムに対する ω-強頭部正規化可能性の反証手続き ([15]) を，文献 [27] において新しく紹介されている組合せ子の書き換えシステム 37 例に対して適用した．その結果，31 例について反証手続きが成功した．また，組合せ子の書き換えシステム 37 例のうち 32 例が非循環性をもち，12 例が停止性，非基礎ループ性と非ループ性をもつことを示した．さらに，2 種類のラベル付け手法を提案し，8 例が非基礎ループ性をもつことを示した．今後の課題は，先行研究で作成したプログラムを改良して新しい処理系に対応させ，組合せ子の ω-強頭部正規化可能性に対する反証実験を行うことである．さら

表 2　組合せ子の書き換え規則がもつ性質

Table 2　Properties for rewrite rules of combinators.

非循環性 $\Longleftarrow$ 非基礎ループ性 $\Longleftarrow$ 非ループ性 $\Longleftarrow$ 停止性

非循環性 $\not\Longrightarrow$ 非基礎ループ性 $\not\Longrightarrow$ 非ループ性 $\not\Longrightarrow$ 停止性

番号	組合せ子	書き換え規則	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
1	B_2	$\mathsf{B}_2xyzw \to x(yzw)$	○	○	○	○
2	B_3	$\mathsf{B}_3xyzwv \to x(yzwv)$	○	○	○	○
3	D_1	$\mathsf{D}_1xyzwv \to xyz(wv)$	○	○	○	○
4	D_2	$\mathsf{D}_2xyzw \to x(y(zw))$	○	○	○	○
5	D_3	$\mathsf{D}_3xyzwv \to x(yz)(wv)$	○	○	○	○
6	$\hat{\mathsf{E}}$	$\hat{\mathsf{E}}xy_1y_2y_3z_1z_2z_3 \to x(y_1y_2y_3)(z_1z_2z_3)$	○	○	○	○
7	Q_0	$\mathsf{Q}_0xyzw \to xz(yw)$	○	○	○	○
8	Q_2	$\mathsf{Q}_2xyz \to y(zx)$	○	○	○	○
9	Q_4	$\mathsf{Q}_4xyz \to z(yx)$	○	○	○	○
10	Q_5	$\mathsf{Q}_5xyzw \to z(xyw)$	○	○	○	○
11	Q_6	$\mathsf{Q}_6xyzw \to w(xyz)$	○	○	○	○
12	M_2	$\mathsf{M}_2xy \to xy(xy)$	○	○	?	×
13	P	$\mathsf{P}xyz \to z(xyz)$	○	○	?	⊗
14	P_1	$\mathsf{P}_1xyz \to y(xxz)$	○	○	○	○
15	P_2	$\mathsf{P}_2xyz \to x(yyz)$	○	×	×	×
16	P_3	$\mathsf{P}_3xyz \to y(xzy)$	?	?	?	⊗
17	S_0	$\mathsf{S}_0xyz \to xzyz$	×	×	×	×
18	S'	$\mathsf{S}'xyzw \to xywzw$	×	×	×	×
19	Φ	$\Phi xyzw \to x(yw)(zw)$	○	○	?	⊗
20	Φ_2	$\Phi_2xyzw_1w_2 \to x(yw_1w_2)(zw_1w_2)$	○	○	?	⊗
21	S_1	$\mathsf{S}_1xyzw \to xyw(zw)$	○	○	?	⊗
22	S_2	$\mathsf{S}_2xyzw \to xzw(yzw)$	○	○	?	⊗
23	S_3	$\mathsf{S}_3xyzwv \to xy(zv)(wv)$	○	?	?	⊗
24	L_1	$\mathsf{L}_1xyz \to x(yyz)$	○	× [11]	× [11]	× [11]
25	Γ	$\Gamma xy \to xy(\Gamma xy)$	○	×	×	×
26	e_1	$\mathsf{e}_1xy \to xyx$	×	×	×	×
27	e_2	$\mathsf{e}_2xy \to yxy$	×	×	×	×
28	S_4	$\mathsf{S}_4xyzwv \to z(xwv)(ywv)$	○	○	?	⊗
29	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1zxy \to z(yxy)(xyx)$	○	× [11]	× [11]	× [11]
30	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2zxy \to z(xyx)(yxy)$	○	× [11]	× [11]	× [11]
31	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1xyzw \to xz(yw)(xz)$	○	?	?	⊗
32	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2xyzw \to xw(yz)(xw)$	○	?	?	⊗
33	α_1	$\alpha_1zxy \to x(yy)(zzxy)$	○	×	×	×
34	α_2	$\alpha_2zwxy \to w(yy)(zxy)$	○	× [11]	× [11]	× [11]
35	N	$\mathsf{N}zxy \to z(\mathsf{N}xxy)(\mathsf{N}yxy)$	○	×	×	×
36	s	$\mathsf{s}xy \to x(\mathsf{s}xy)(\mathsf{s}yx)$	○	×	×	×
37	M_3	$\mathsf{M}_3xy \to xy(xy)(xy)$	○	○	?	×

(○：成立（本研究），×：不成立（本研究），⊗：Maybe([11])，?：未解決)

に，AProVE[11] で停止性が証明できなかった (かもしれない) と判定された 10 例に関して，停止性の証明または反証を行うことである．

謝辞 貴重なコメントを頂いた査読者の方々に感謝致します．また，プログラムを提供して頂いた青戸等人氏（新潟大学）に感謝致します．本研究は JSPS 科研費 22K11904 の助成を受けている．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T. : *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[2] Barendregt, H. P. : *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics, 2nd revised edition*, North-Holland, 1984.

[3] Barendregt, H. P., Endrullis, J., Klop, J. W. and Waldmann, J. : Dance of the Starlings, Fitting, M., Rayman, B. (eds), *Raymond Smullyan on Self Reference*, Springer, 2018, pp.67–111.

[4] Bergstra, J. and Klop, J. W. : Church-Rosser strategies in the lambda calculus, *Theoretical Computer Science*, Vol. 9, Issue 1, 1979, pp. 27–38.

[5] Courcelle, B. : Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 25, Issue 2, 1983, pp.95–169.

[6] Curry, H. B. and Feys, R. : *Combinatory Logic*, Vol. 1, North-Holland, 1958.

[7] Dauchet, M. : Simulation of Turing machines by a regular rewrite rule, *Theoretical Computer Science*, Vol. 103, Issue 2 ,1992, pp. 409–420.

[8] Devlin, K. : *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.

[9] Endrullis, J., Grabmayer, C. A., Hendriks, D., Klop, J. W. and de Vrijer, R. C. : Proving infinitary normalization, *Proc. of International Workshop on Types for Proofs and Programs*, TYPES 2008, LNCS 5497, Springer-Verlag, 2009, pp. 64–82.

[10] Giesl, J., Thiemann, R. and Schneider-Kamp, P. : Proving and disproving termination of higher-order function, *Proc. of the 5th International Workshop on Frontiers of Combining Systems*, FroCoS 2005, LNAI 3717, 2005 pp.216–231.

[11] Giesl, J. et al. : AProVE (AUTOMATED PROGRAM VERIFICATION ENVIRONMENT), Web Interface, https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/

[12] Hindley, J. R. and Seldin, J. P. : *Introduction to Combinators and Lambda-Calculus*, Cambridge University Press, 1986.

[13] Ikebuchi, M. and Nakano, K. : On properties of B-terms, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 16, Issue 2, 2020, pp. 8:1–8:23.

[14] 岩見宗弘：組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol. 2, No.2, 2009, pp.97–104.

[15] 岩見宗弘, 青戸等人：無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証, コンピュータソフトウェア, Vol. 29, No. 1, 2012, pp. 211–239.

[16] Ketema, J, Klop, J. W. and van Oostrom, V. : Vicious circles in orthogonal term rewriting systems, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 124, Issue 2, 2005, pp.65–77.

[17] Klop, J. W. : New fixed point combinators from old, *Reflections on Type Theory, Lambda Calculus, and the Mind*, Essays Dedicated to Barendregt, H. on the Occasion of his 60th Birthday, 2007, pp.197–210.

[18] Klop, J. W. and de Vrijer, R. C. : Infinitary normalization, *We Will Show Them !*, Essays in Honour of Gabbay, D., Vol. 2, College Publications, 2005, pp.169—192.

[19] Klop, J. W. : Reduction cycles in combinatory logic, *To Curry, H. B. : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, 1980, pp. 193–214.

[20] Middeldorp, A. and Gramlich, B. : Simple termination is difficult, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 6, 1995, pp.115–128.

[21] Middeldorp, A. and Zantema, H. : Simple termination of rewrite systems, *Theoretical Computer Science*, Vol. 175, Issue 1, 1997, pp.127–158.

[22] Ohlebusch, E. : *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer, 2002.

[23] Peyton Jones, S. L. : *The Implementation of Functional Programing Languages*, Prentice Hall, 1987.

[24] Plaisted, D. A : The undecidability of self-embedding for term rewriting systems, *Information Processing Letters*, Vol. 20, Issue 2, 1985, pp. 61–64.

[25] Probst, D. and Studer, T. : How to normalize the Jay, *Theoretical Computer Science*, Vol. 254, Issue 1-2, 2001, pp. 677–681.

[26] Smullyan, R. : *To Mock a Mockingbird*, Knopf, New York, 1985.

[27] Smullyan, R. : *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press, 1994.

[28] Sprenger, M. and Wymann-Böni, M. : How to decide the lark, *Theoretical Computer Science*, Vol. 110, Issue 2, 1993, pp. 419–432.

[29] Statman, R. : The word problem for Smullyan's lark combinator is decidable, *J. Symbolic Computation*, Vol. 7, Issue 2, 1989, pp. 103–112.

[30] Terese, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press, 2003.

[31] Turner, D. A. : A new implementation technique for applicative languages, *J. Software: Practice and Experience*, Vol. 9, Issue 1, 1979, pp.31–49.

[32] Waldmann, J. : The Combinator S, *Information and Computation*, Vol. 159, Issues 1-2, 2000, pp.2–21.

[33] Zantema, H. : Normalization of infinite terms, *Proc. of the International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, RTA 2008, LNCS 5117, Springer-Verlag, 2008, pp.441–445.

岩見　宗弘　（正会員）

1999 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了．博士（情報科学）．同年島根大学総合理工学部助手．2007 年同助教，2008 年同講師，2012 年同准教授．項書き換えシステム，定理自動証明の研究に従事．電子情報通信学会，日本ソフトウェア科学会，ACM 各会員．

